FUNGSI DAN LIMIT FUNGSI

Anita T. Kurniawati

FUNGSI DAN OPERASI FUNGSI

- y disebut fungsi dari x jika dpt ditentukan suatu hubungan antara y dan x SDH untuk setiap nilai x menentukan secara tunggal nilai y.
- Hubungan antara y dan x biasanya ditulis :

$$y = f(x)$$

- Contoh 1: $f(x) = x^2 + 1$

  Mendefinisikan fungsi f yang mengawankan bilangan $x^2 + 1$ dengan bilangan x

  $f(3) = x^2 + 1 = 3^2 + 1 = 10$ f mengawankan 10 dengan 3

DEFINISI

- **Contoh 2 :**

Jika $\phi(x) = \dfrac{1}{x^3 - 1}$ maka

$$\phi(3\sqrt{7}) = \frac{1}{(3\sqrt{7})^3 - 1} = \frac{1}{16}$$

$$\phi(5^{\frac{1}{6}}) = \frac{1}{(5^{\frac{1}{6}})^3 - 1} = \frac{1}{\sqrt{5} - 1}$$

DOMAIN DAN RANGE

Domain : Daerah peubah bebas dimana fungsi memperoleh nilai

Range : Kumpulan nilai-nilai fungsi yang didpt dari domain

Contoh :

$f(x) = x^2 + 1$ mempunyai arti dan nilai bil. real untuk semua bil. Real.

Jadi domain f adalah $-\infty \leq x \leq +\infty$

D E F I N I S I

LATIHAN

- Diberikan $f(x) = 2x^2 + 3$, dapatkan
  a) $f(-2)$ b) $f(-\sqrt{3})$ c) $f(a+1)$ d) $f(3t)$
- Dapatkan domain dan range dari fungsi berikut :
  a) $f(x) = \sqrt{x-2}$ b) $f(x) = \dfrac{1}{2+\sqrt{x}}$
  c) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2-4}{x-2}}$
- Buatlah sketsa grafik

$$\phi(x) = \begin{cases} x+3, & x \neq 3 \\ 7, & x = 3 \end{cases}$$

OPERASI-OPERASI PD FUNGSI

OPERASI-OPERASI ARITMATIK PADA FUNGSI

Fungsi-fungsi dapat dijumlahkan, dikurangkan, digandakan dan dibagi. Sebagai contoh, jika

$f(x) = x$ dan $g(x) = x^2$, maka

$f(x) + g(x) = x + x^2$

Rumus ini mendefinisikan suatu fungsi baru yang disebut *jumlah* dari f dan g dan dituliskan dengan $f + g$. Jadi

$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = x + x^2$

DEFINISI :
DIKETAHUI FUNGSI F DAN G, MAKA RUMUS-RUMUS UNTUK JUMLAH F + G, SELISIH F – G, HASIL KALI F . G DAN HASIL BAGI F /G

- Jumlah (f + g)(x) = f(x) + g(x)
- Selisih (f - g)(x) = f(x) - g(x)
- Hasil Kali (f.g)(x) = f(x).g(x)
- Hasil Bagi (f/g)(x) = f(x)/g(x)

Contoh

Misalkan f(x) = 2x dan g(x) = x-2

Dapatkan (f + g)(x),(f - g)(x),(f.g)(x), (f/g)(x)

KOMPOSISI DUA FUNGSI

- Diketahui fungsi-fungsi f dan g, maka komposisi f dengan g, ditulis f o g adalah funsi yang didefinisikan dengan

  $$f \circ g\ (x) = f(g(x))$$

  artinya g(x) disubtitusikan pada x dalam rumus f

Contoh

Misal $f(x) = x^2 + 1$ dan $g(x) = x + 2$

f o g (x) = f(g(x)) = $f(x) = (x+2)^2 + 1 = x^2 + 4x + 5$

- Latihan

  Dapatkan rumus dari fungsi-fungsi dan tetapkan domain untuk masing-masing soal :

  1.(f+g)(x) , 2. (f.g)(x), 3. (fog)(x)

  a. $f(x) = 2x, \quad g(x) = x^2 + 1$

  b. $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}, \; g(x) = \dfrac{1}{x}$

GRAFIK FUNGSI

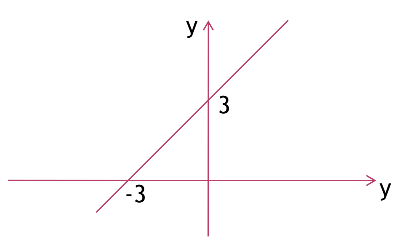
Grafik suatu fungsi f pada bidang-xy didefinisikan sebagai grafik dari persamaan y = f(x)

Contoh :

1. Buatlah sketsa grafik f(x) = x + 3

   Penyelesaian :

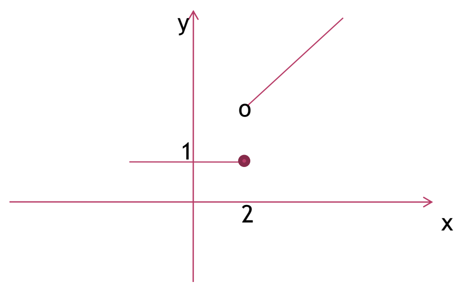
   Berdasarkan definisi grafik f dlm bidang-xy adalah grafik persamaan y = x + 3



G R A F I K

2. Buatlah sketsa grafk $g(x) = \begin{cases} 1, & x \le 2 \\ x+2, & x > 2 \end{cases}$

Penyelesaiannya :



MENGGAMBAR FUNGSI DENGAN GESERAN (TRANSLASI)

Grafik fungsi $f(x) = a(x-p)^2 + q$ dapat diperoleh dengan mentranslasikan grafik $f(x) = ax^2$ oleh vektor (p,q), yaitu kekiri/kanan sejauh $\pm p$ dan ke atas /bawah sejauh $\pm q$

Contoh :

gambarkan grafik fungsi berikut ini ;

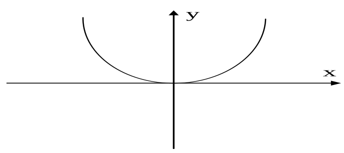
a. $y = x^2 + 2$

b. $y = x^2 - 2$

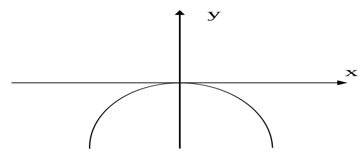
c. $y = (x+2)^2$

d. $y = (x-2)^2$

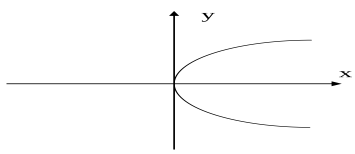
KATALOG GRAFIK-GRAFIK DASAR



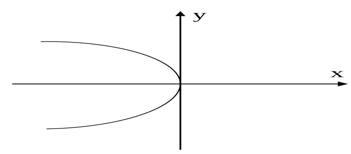
$y = x^2$



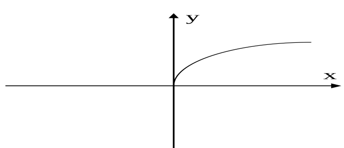
$y = -x^2$



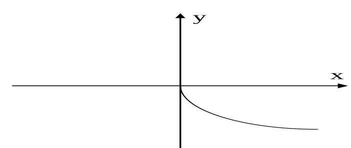
$x = y^2$



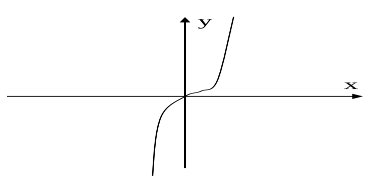
$x = -y^2$



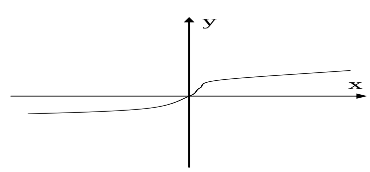
$y = \sqrt{x}$



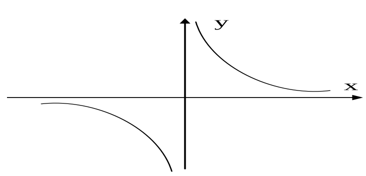
$y = -\sqrt{x}$



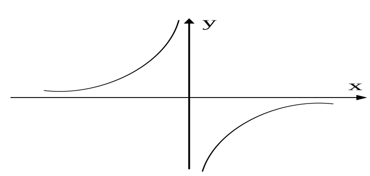
$y = x^3$



$y = \sqrt[3]{x}$



$y = 1/x$



$y = -1/x$

KLASIFIKASI FUNGSI

- Fungsi Aljabar :
  - Fungsi Polinomial
  - Fungsi Rasional
  - Fungsi Pangkat
- Fungsi Transenden :
  - Fungsi Trigonometri dan Inversnya
  - Fungsi Eksponensial dan Logaritma
  - Fungsi Hiperbolik dan Inversnya

K L A S I F I K A S I F U N G S I

FUNGSI ALJABAR

Fungsi yang paling sederhana disebut *fungsi konstan*. Contohnya ; $f(x) = 3$ maka

$f(-1) = 3$, $f(0) = 3$, $f(\sqrt{2}) = 3$, $f(9) = 3$

Fungsi dengan bentuk cx^n, dimana c adalah suatu konstanta dan n adalah bilangan bulat tak negatif, disebut *monomial dalam x*.

contoh $2x^3$, πx^7, $4x^0(= 4)$, $-6x$, $x17$

Fungsi-fungsi $4x^{1/2}$ dan x^{-3} *bukan* monomial sebab pangkat dari x bukan bilangan bulat tak negatip.

POLINOMIAL DALAM X.

Contoh :

$$x^3 + 4x + 7, \quad 3 - 2x^3 + x^{17}, \quad 9, \quad \frac{17 - 2x}{3}, \quad x^5$$

Rumus untuk polinomial dalam x adalah

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

atau

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_0$$

POLINOMIAL-POLINOMIAL DERAJAT PERTAMA, KE-DUA, KE-TIGA

DESKRIPSI	RUMUS UMUM
Polinomial linier	$a_0 + a_1 x \ (a_1 \neq 0)$
Polinomial kuadratik	$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \ (a_2 \neq 0)$
Polinomial kubik	$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \ (a_3 \neq 0)$

FUNGSI RASIONAL

Adalah suatu fungsi yang dapat dinyatakan sebagai rasio dua polinomial.

Contoh :

$$\frac{X^5 - 2x^2 + 1}{X^2 - 4} \qquad \frac{x}{x+1}$$

$$f(x) = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + ... + b_n x^n}$$

FUNGSI PANGKAT

Contoh :

$$f(x) = x^{2/3} = (\sqrt{x})^2 \text{ dan } g(x) = \frac{(x-3)\sqrt{x}}{x^5 + \sqrt{x^2} + 1}$$

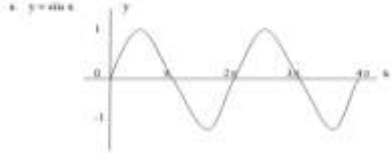
FUNGSI TRANSENDEN

- Fungsi Trigonometri dan Inversnya

Hubungan antara ukuran sudut dan radian

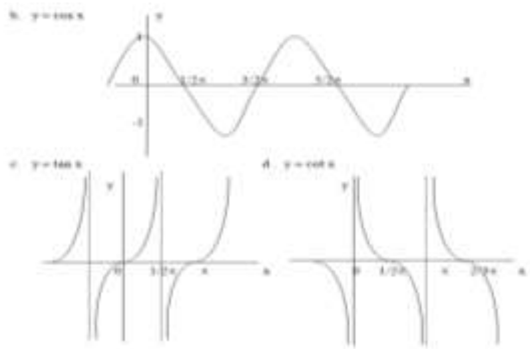
$$\frac{360^\circ}{2\pi} = \frac{180^\circ}{\pi}$$

Dan satu derajat ekivalen dengan $\frac{\pi}{180^\circ} rad. \ nilai \pi = 3{,}14$



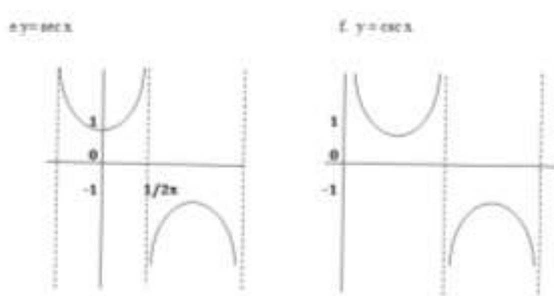
$$y = \sin(x + T) = \sin x$$

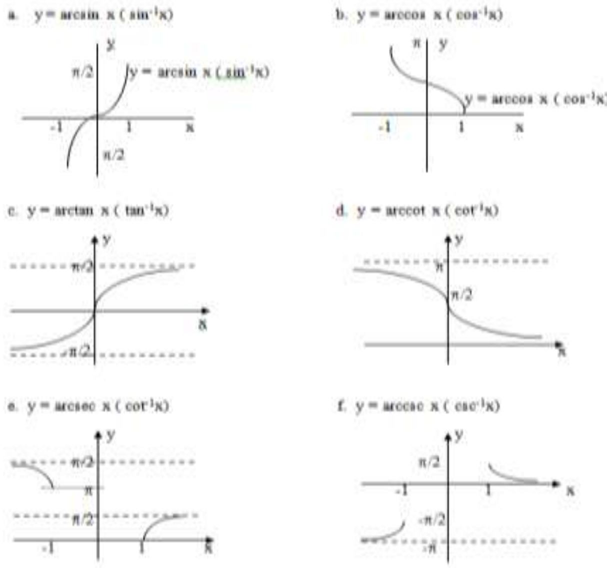
Periode fungsi adalah 2π



$y = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ Untuk nilai cos x=0, maka nilai tan x tidak terdefinisi

$y = \cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ Untuk nilai sin x=0, maka nilai cot x tidak terdefinisi

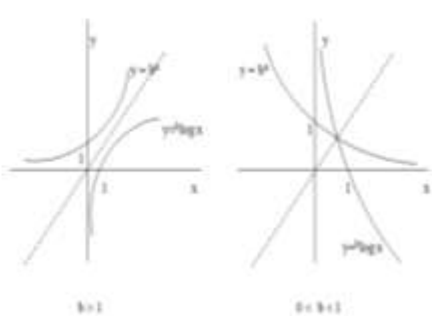




- Fungsi Eksponensial dan Logaritma

Jika $y={}^a\log x$, maka y merupakan pangkat untuk a yang harus menghasilkan x, jadi $x = a^y$ kebalikannya, jika $y={}^a\log x$ sehingga

$$y={}^a\log x \;\; dan \;\; x = a^y \;\; adalah \;\; ekivalen$$

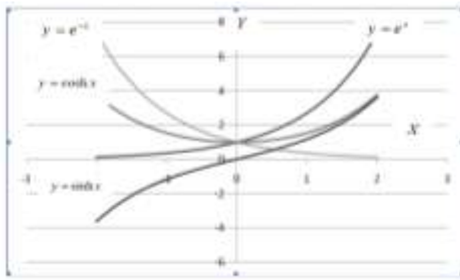


Fungsi Hiperbolik dan Inversnya

$$\sinh x = \frac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right) \qquad \coth x = \frac{\left(e^{x} + e^{-x}\right)}{\left(e^{x} - e^{-x}\right)}$$

$$\cosh x = \frac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right) \qquad \sec hx = \frac{2}{\left(e^{x} + e^{-x}\right)}$$

$$\tanh x = \frac{\left(e^{x} - e^{-x}\right)}{\left(e^{x} + e^{-x}\right)} \qquad \csc hx = \frac{2}{\left(e^{x} - e^{-x}\right)}$$



$f(x)$

LIMIT FUNGSI

- Jika $x \to a^{+}$(baca *x* mendekati a dari kanan) dan $\lim_{x\to a^{+}} f(x)$ ada, maka bentuk $\lim_{x\to a^{+}} f(x)$ disebut limit kanan.
- jika $x \to a^{-}$ (baca *x* mendekati a dari kiri) dan $\lim_{x\to a^{-}} f(x)$ ada, maka bentuk $\lim_{x\to a^{-}} f(x)$ disebut limit kiri.
- Jika limit kanan dan limit kiri ada dan nilainya sama, maka dikatakan bahwa $\lim_{x\to a} f(x)$ ada.

Contoh :
Diberikan f(x) = x+1 , ditanyakan $\lim_{x\to 2} f(x)$

x	1,80	1,90	1,97	1,99	1,99999
	2,80	2,90	2,97	2,99	2,99999

x	2,20	2,15	2,05	2,01	2,00001
	3,20	3,15	3,05	3,01	3,00001

LIMIT FUNGSI

SIFAT-SIFAT LIMIT FUNGSI

- Misalkan diketahui dua fungsi f(x) dan g(x) memenuhi $\lim_{x\to a} f(x) = L$ dan $\lim_{x\to a} g(x) = M$ dan c adalah bilangan real, maka

$$\lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x) = L \pm M$$

$$\lim_{x\to a} cf(x) = c\lim_{x\to a} f(x) = cL$$

$$\lim_{x\to a}[f(x)g(x)] = \lim_{x\to a} f(x).\lim_{x\to a} g(x) = L.M$$

$$\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \frac{L}{M}, dan \lim_{x\to a} g(x) \neq 0$$

$$\lim_{x\to a}\sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim_{x\to a} f(x)} = \sqrt{L}$$

BEBERAPA LIMIT YANG PENTING

1. $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$
2. $\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-x} = e$
3. $\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}} = e$
4. $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{p}{x}\right)^x = e^p$
5. $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a;\ (a>0)$
6. $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$
7. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$
8. $\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{\mathrm{x}} = 1$
9. $\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}\, x}{\mathrm{x}} = 1$
10. $\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{arctg}\, x}{x} = 1$

KONTINUITAS

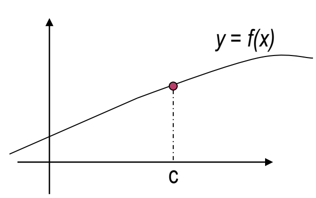
Definisi ;

Suatu fungsi ***f*** dikatakan <u>kontinu</u> di titik c, jika syarat-syarat berikut dipenuhi ;

1. f(c) terdefinisi
2. $\lim_{x \to c} f(x) \ ada$
3. $\lim_{x \to c} f(x) = f(x)$

jika salah satu tidak terpenuhi, maka fungsi disebut diskontinu dititik c

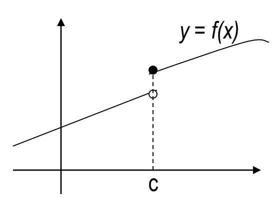
DISKONTINUITAS



Pada gambar diatas terjadi lubang pada titik c

Karena fs *f* tidak terdifinisi di ttk tsb

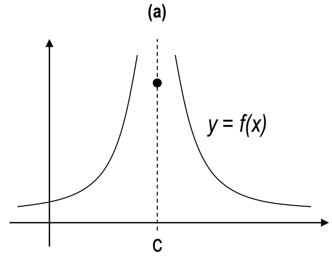
(a)



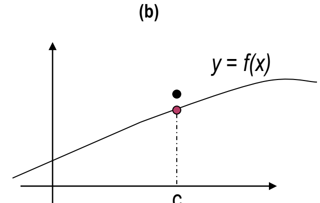
Pada gb diatas terjadi patahan pd grafiknya, fs *f* terdifinisi di c, tapi lim *f*(x) tdk ada

x ⟶ c

(b)



Sama seperti gambar (b)



Pada gambar diatas, fs *f* terdifinisi di c dan lim *f*(x) ada, tetapi ada patahan pd ttk c, lim *f*(x) ≠*f*(c)