Logo

DETERMINAN

Anita T. Kurniawati

Logo

Determinan Tingkat n

$$D = \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{aa} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Determinan tingkat 2:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a.d - b.c$$

Logo

MINOR:

Minor adalah dari elemen a_{pq} dari det. Tingkat n adalah det. Tingkat (n-1) yang diperoleh dengan mencoret baris ke p dan kolom ke q, diberi lambang M_{pq}.

Contoh: minor dari elemen a_{21} dari determinan tingkat 3

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \text{ adalah } M_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Logo

KOFAKTOR:

Kofaktor dari elemen a_{pq} diberi lambang K_{pq} didefinisikan sbb:

$$K_{pq} = (-1)^{p+q} M_{pq}$$

Jika $p+q =$ genap → $K_{pq} = M_{pq}$

Jika $p+q =$ gasal → $K_{pq} = -M_{pq}$

NILAI DETERMINAN

Nilai determinan (Δ) adalah jumlah hasil elemen-elemen dari sebuah baris (kolom) dengan kofaktor-kofaktor yang bersesuaian. **(EXPANSI LAPLACE)**

$\Delta = a_{11}K_{11} + a_{12}K_{12} + a_{13}K_{13} \cdots + a_{1n}K_{1n}$ (Ekspansi menurut elemen-elemen baris ke-1).

Logo

ATURAN SARRUS

(HANYA BERLAKU UNTUK DET. TINGKAT 3)

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$\Delta = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33})$$

Logo

SIFAT DETERMINAN

1. Nilai Δ^T = nilai Δ
2. Jika baris ke $i = 0$ (kolom ke-$i = 0$) maka nilai $\Delta = 0$.
3. Jika baris ke i ditukar dengan baris ke-j (kolom i ditukar dengan kolom ke j) diperoleh det. Baru Δ_1 dengan nilai $\Delta_1 = -\Delta$.
4. Jika baris ke i = baris ke j (kolom ke i=kololm ke j) maka nilai $\Delta = 0$
5. Nilai det menjadi k kali jika semua elemen pada sebuah baris (kolom) digandakan dengan $k \neq 0$.

Logo

6. jika ada 2 baris (2 kolom) yang sebanding maka nilai $\Delta = 0$.

7. $\begin{vmatrix} (x_1+y_1) & b_1 & c_1 \\ (x_2+y_2) & b_2 & c_2 \\ (x_3+y_3) & b_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & b_1 & c_1 \\ x_2 & b_2 & c_2 \\ x_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1 & b_1 & c_1 \\ y_2 & b_2 & c_2 \\ y_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

8. Nilai sebuah det. Δ tetap tidak berubah, jika setelah semua elemen-elemen sebuah baris (kolom) di gandakan dengan $k \neq 0$ kemudian ditambahkan (dikurangkan) pada elemen-elemen yang bersesuaian dari baris (kolom) lainnya.

Logo

SISTEM PERSAMAAN LINIER

3 PERSAMAAN DENGAN 3 VARIABEL:

$$a_1x + a_2y + a_3z = k_1$$

$$b_1x + b_2y + b_3z = k_2$$

Akan didapatkan x, y, z :.......

$$c_1x + c_2y + c_3z = k_3$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0,\quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} k_1 & a_2 & a_3 \\ k_2 & b_2 & b_3 \\ k_3 & c_2 & c_3 \end{vmatrix},\quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & k_1 & a_3 \\ b_1 & k_2 & b_3 \\ c_1 & k_3 & c_3 \end{vmatrix},\quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & k_1 \\ b_1 & b_2 & k_2 \\ c_1 & c_2 & k_3 \end{vmatrix}$$

Maka: $x = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}; y = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}; z = \dfrac{\Delta_3}{\Delta}$ disebut aturan cramer.

Logo

Contoh 1

Dapatkan determinan dari

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 15 & 29 & 2 & 14 \\ 16 & 19 & 3 & 17 \\ 33 & 39 & 8 & 38 \end{vmatrix}$$

Penyelesaian:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 15 & 29 & 2 & 14 \\ 16 & 19 & 3 & 17 \\ 33 & 39 & 8 & 38 \end{vmatrix} \xrightarrow[k_4-4k_3]{\substack{k_1-3k_3 \\ k_2-2k_3}} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 9 & 25 & 2 & 6 \\ 7 & 13 & 3 & 5 \\ 9 & 23 & 8 & 6 \end{vmatrix} \xrightarrow{\exp B_1} +1 \begin{vmatrix} 9 & 25 & 6 \\ 7 & 13 & 5 \\ 9 & 23 & 6 \end{vmatrix}$$

Logo

Contoh 2

Selesaikan SPL berikut dengan Cramer:

$$\begin{cases} 3x + y + 2z = 3 \\ 2x - 3y - z = -3 \\ x + 2y + z = 4 \end{cases}$$

Penyelesaian:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 8,\ \Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -3 & -3 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 8,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 16,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & -3 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -8, \text{ jadi } x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{8}{8} = 1,\ y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{16}{8} = 2,\ z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-8}{8} = -1$$