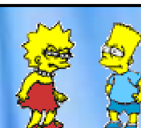
MATRIKS

Anita T. Kurniawati,M.Si.



DEFISI MATRIKS

Susunan segiempat yang terdiri atas bilangan – bilangan real yang tersusun atas baris dan kolom

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \longrightarrow \text{m baris}$$

$\downarrow$ n kolom

di katakan matriks *A* berukuran m x n

- Baris ke-i dari A adalah :

$$\begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix} \quad (1 \le i \le m)$$

- Kolom ke-j dari A adalah :

$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} \quad (1 \le j \le n)$$

- Matriks A dapat juga ditulis :

  A = [a_{ij}]

- Jika m = n maka dikatakan A matriks *Bujur sangkar (b.s),* dan bilangan $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ disebut dengan *diagonal utama*

Jenis – jenis Matriks

1. Matriks Diagonal

♦ Matriks b.s. dengan elemen diluar diagonal utama adalah nol, yaitu

$a_{ij} = 0$ untuk $i \neq j$

2. Matriks Skalar

♦ Matriks diagonal dengan elemen pada diagonal utama adalah sama, yaitu

$a_{ij} = c$ untuk $i = j$ dan $a_{ij} = 0$ untuk $i \neq j$

3. Matriks Segitiga Atas

♦ Matriks b.s. dengan elemen dibawah diagonal utama adalah nol

Jenis – Jenis Matriks

4. Matriks Segitiga Bawah

- Matriks b.s. dengan elemen diatas diagonal utama adalah nol

5. Matriks Identitas

- Matriks diagonal dengan elemen pada diagonal utama adalah 1 , yaitu

a_{ij} = 1 untuk $i = j$ dan a_{ij} = 0 untuk $i \neq j$

6. Matriks Nol

- Matriks yang seluruh elemennya adalah nol.

Operasi Matriks

- Persamaan Dua Matriks
- Penjumlahan Matriks
- Perkalian Skalar dan Matriks
- Transpose Matriks
- Perkalian Matriks

Persamaan Dua Matriks

- **Definisi**

  Dua matriks $A = [a_{ij}]$ dan $B = [b_{ij}]$ dikatakan sama jika :

  $$a_{ij} = b_{ij},\ 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n$$

  yaitu, elemen yang bersesuaian dari dua matriks tersebut adalah sama.

- **Contoh :**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -4 & -5 \end{bmatrix} \quad dan \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & w \\ 2 & x & 4 \\ y & -4 & z \end{bmatrix}$$

Matriks A dan B dikatakan sama jika $w = -1$, $x = -3$, $y = 0$, dan $z = -5$

Penjumlahan Matriks

- **Definisi**

  Jika $A = [a_{ij}]$ dan $B = [b_{ij}]$ adalah matriks ukuran m x n, maka jumlahan A dan B adalah matriks $C = [c_{ij}]$ ukuran m x n dengan

  $$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Contoh

Diberikan Matriks A dan B adalah

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

maka

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Perkalian Skalar & Matriks

- **Definisi**

  Jika A = [a_{ij}] ukuran m x n dan r adalah sebarang skalar real, maka perkalian skalar rA adalah matriks B = [b_{ij}] ukuran m x n dengan

  $$b_{ij} = r\, a_{ij}$$

- **Contoh**

  Jika r = -3 dan

  maka

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$rA = \begin{bmatrix} -3 & 6 & -12 \end{bmatrix}$$

Transpose Matriks

- Definisi

  Jika A = [a_{ij}] adalah matriks ukuran m x n, maka transpose dari A adalah matriks

  A^t = [a_{ij}^t] ukuran n x m dengan

  $$a_{ij}^t = a_{ji}$$

- Contoh

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -2 \end{bmatrix}$$

maka

$$A^t = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 5 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

Perkalian Matriks

- **Definisi**

Jika A = $[a_{ij}]$ ukuran m x p dan B = $[b_{ij}]$ ukuran p x n, maka perkalian A dan B, dinotasikan AB, adalah matriks C = $[c_{ij}]$ ukuran m x n dimana

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ip}b_{pj}$$

Ilustrasi

$$\begin{array}{c} \\ row_i(A) \end{array} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mp} \end{bmatrix} \begin{array}{c} Col_j(B) \\ \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \vdots & b_{2n} \\ \vdots & & & & & \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pj} & \cdots & b_{pn} \end{bmatrix} \end{array} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & c_{ij} & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix}$$

$$row_i(A)col_j(B) = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ip}b_{pj} = c_{ij}$$

Latihan Soal

1. Diberikan matriks – matriks sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -4 & 5 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & -5 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Jika mungkin, maka hitunglah

a. AB
b. BA
c. A(C + E)
d. CB + D
e. AB + DF
f. (D + F)A
g. BA + FD
h. A(BD)

INVERS MATRIKS

Definisi

Matriks A berukuran n x n disebut ***invertible*** jika ada matriks B berukuran n x n sedemikian hingga :

$$AB = BA = I_n$$

Jika tidak demikian, maka dikatakan A ***tidak invertible.***

Matriks **B** disebut ***invers*** dari A, dinotasikan A^{-1}

Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & \frac{3}{2} \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Sifat invers matriks

1. Jika A invertible maka A^{-1} juga invertible, dan
   $$(A^{-1})^{-1} = A$$
2. Jika A dan B invertible, maka AB juga invertible dan $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$
3. Jika A invertible, maka
   $$(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$$
4. Jika $A_1, A_2, \ldots, A_k$ adalah matriks – matriks invertible, maka $A_1 A_2 \ldots A_k$ juga invertible dan
   $$(A_1 A_2 \ldots A_k)^{-1} = A_k^{-1} A_{k-1}^{-1} \ldots A_1^{-1}$$

Bagaimana mendapatkan Invers Matriks?

1. $A.A^{-1} = I$

2. Operasi baris Elementer (OBE)

3. $A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj(A)$

Contoh 1:

Dapatkan A^{-1} dari $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.

$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = (2)(5) - (3)(3) = 1 \neq 0 \Rightarrow$ mempunyai invers.

Misal: $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow A.A^{-1} = I$.

$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2a+3c & 2b+3d \\ 3a+5c & 3b+5d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} 2a+3c = 1 \\ 3a+5c = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 5, c = -3$

$\begin{cases} 2b+3d = 0 \\ 3b+5d = 1 \end{cases} \Rightarrow b = -3, d = 2$

Jadi: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

Contoh 2:

Dapatkan invers dari $A_{3x3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 7 & 4 \end{pmatrix}$.

Penyelesaian:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{B_3-3B_1}{\overset{B_2-2B_1}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{B_3-B_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \underset{B_2-6B_3}{\overset{B_1+B_3}{\sim}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 7 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \overset{B_1-2B_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -8 & -15 & 13 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 7 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right);$$

Jadi: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -8 & -15 & 13 \\ 4 & 7 & -6 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Contoh 3:

Dapatkan A^{-1} dari $A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

Penyelesaian:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = (3)(5) - (7)(2) = 1.$$

$$\text{Kofaktor (A)} = \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow Adj(A) = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj(A) = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}.$$

Sistem Persamaan Linier (Metode matriks diperbesar)

Contoh: Selesaikan $\begin{cases} x+y+2z=9 \\ 2x+4y-3z=1 \\ 3x+6y-5z=0 \end{cases}$.

Penyelesaian:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{array}\right) \underset{B_2-2B_1}{\overset{B_3-3B_1}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{array}\right) \overset{B_3-\frac{3}{2}B_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{array}\right)$$

$$-\frac{1}{2}z=-\frac{3}{2} \Rightarrow z=3.$$

$$2y-7z=-17 \Rightarrow 2y-7(3)=-17 \Rightarrow y=2.$$

$$x+y+2z=9 \Rightarrow x+2+2(3)=9 \Rightarrow x=1.$$