

# TITIK BERAT

Anita T. Kurniawati, M.Si.

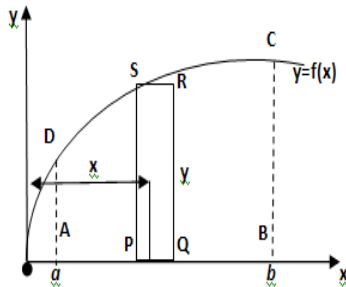
## RUMUS UMUM:

$$\bar{x}M = M_y \Rightarrow \bar{x} = \frac{M_y}{M}$$

$$\bar{y}M = M_x \Rightarrow \bar{y} = \frac{M_x}{M}$$

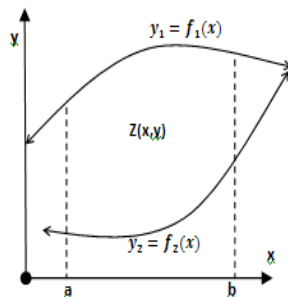
## TITIK BERAT DATARAN

1. Titik berat keping datar homogen yang dibatasi oleh kurva  $y = f(x)$ , sumbu  $x$ , garis-garis  $x = a$  dan  $x = b$ .



$$\bar{x} = \frac{\int_a^b xy \, dx}{\int_a^b y \, dx}; \quad \bar{y} = \frac{\frac{1}{2} \int_a^b y^2 \, dx}{\int_a^b y \, dx}$$

2. Titik berat keping datar homogen yang dibatasi oleh kurva-kurva  $y_1 = f_1(x)$ ,  $y_2 = f_2(x)$  garis-garis  $x = a$  dan  $x = b$  adalah  $Z(\bar{x}, \bar{y})$ , dimana:

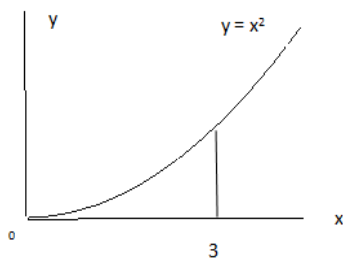


$$\bar{x} = \frac{\int_a^b x(y_1 - y_2) \, dx}{\int_a^b (y_1 - y_2) \, dx}$$

$$\bar{y} = \frac{\frac{1}{2} \int_a^b (y_1^2 - y_2^2) \, dx}{\int_a^b (y_1 - y_2) \, dx}$$

Dapatkan titik berat dataran yang dibatasi oleh  $y=x$  dan  $y=x^2$ , sumbu  $x$  dan garis  $x=3$ .

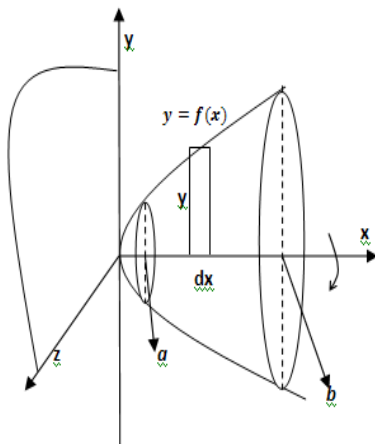
Penyelesaian:



$$\bar{x} = \frac{\int_a^b xy dx}{\int_a^b y dx} = \frac{\int_0^3 x \cdot x^2 dx}{\int_0^3 x^2 dx} = \frac{\frac{1}{4} x^4 \Big|_0^3}{\frac{1}{3} x^3 \Big|_0^3} = \frac{\frac{81}{4}}{9} = \frac{9}{4}$$

$$\bar{y} = \frac{\frac{1}{2} \int_a^b y^2 dx}{\int_a^b y dx} = \frac{\frac{1}{2} \int_0^3 (x^2)^2 dx}{\int_0^3 x^2 dx} = \frac{\frac{1}{10} x^5 \Big|_0^3}{9} = \frac{27}{10}$$

## TITIK BERAT VOLUME BENDA PUTAR



Koordinat titik berat  $C(\bar{x}, \bar{y})$  dari isi benda putar yang terjadi jika dataran yang dibatasi oleh  $y = f(x)$ , sumbu  $x$ , garis-garis  $x = a$  s/d  $x = b$  diputar pada sumbu  $x$ , adalah:

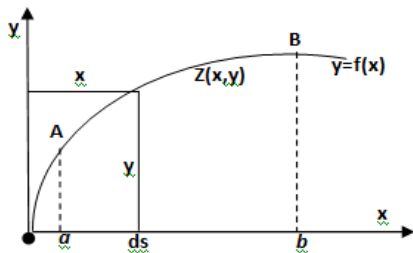
$$\bar{x} = \frac{\int_a^b xy^2 dx}{\int_a^b y^2 dx}; \bar{y} = 0$$

Halaman 42

# No. 11, 12, 15

## Titik Berat Busur

Koordinat titik berat busur AB dari kurva homogen  $y = f(x)$  dengan density =  $\delta$  (konstan) diperoleh sbb:



$$\bar{x} = \frac{\int_a^b x \sqrt{1+(y')^2} dx}{\int_a^b \sqrt{1+(y')^2} dx}; \bar{y} = \frac{\int_a^b y \sqrt{1+(y')^2} dx}{\int_a^b \sqrt{1+(y')^2} dx}$$

## Contoh

Dapatkan titik berat busur seperempat lingkaran  $x^2 + y^2 = a^2$  yang ada dikwadran I.

Penyelesaian:

Busur simetri terhadap  $y = x$ , maka  $\bar{y} = \bar{x}$ . Persamaan busur AB:  $y = \sqrt{a^2 - x^2}$

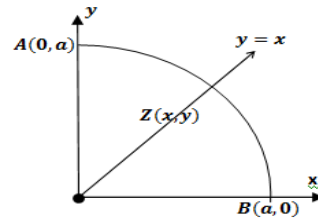
$$y' = -x(a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$dS = \sqrt{1 + (y')^2} dx = a(a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} dx$$

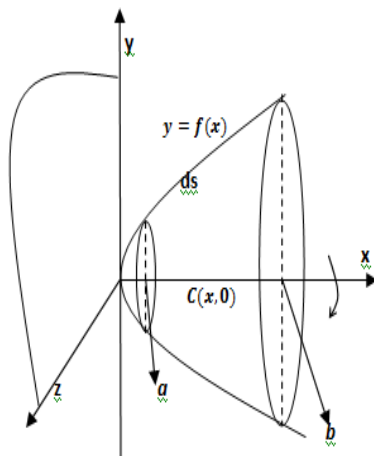
$$\bar{x} = \frac{\int_0^a x dS}{\int_0^a dS} = \frac{\int_0^a xa(a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} dx}{\int_0^a a(a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} dx} = \frac{a^2}{2} \frac{2a}{\pi}$$

$$\bar{y} = \bar{x} = \frac{2a}{\pi}$$

Jadi titik beratnya adalah  $Z(\bar{x}, \bar{y}) = Z\left(\frac{2a}{\pi}, \frac{2a}{\pi}\right)$



## Titik Berat Kulit Benda Putar



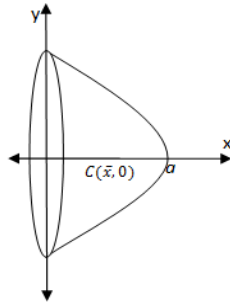
Jika  $y = f(x)$  diputar mengelilingi penuh sumbu  $x$  dari  $x = a$  s/d  $x = b$ , maka koordinat titik berat  $C(\bar{x}, \bar{y})$  dari kulit benda putar yang terjadi adalah:

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b xy\sqrt{1+(y')^2} dx}{\int_a^b y\sqrt{1+(y')^2} dx}; \bar{y} = 0$$

## Contoh:

Dapatkan titik berat kulit benda putar yang terjadi jika busur  $\frac{1}{4}$  lingkaran  $x^2 + y^2 = a^2$  yang di kwadran I diputar pada sumbu  $x$ .

Penyelesaian:



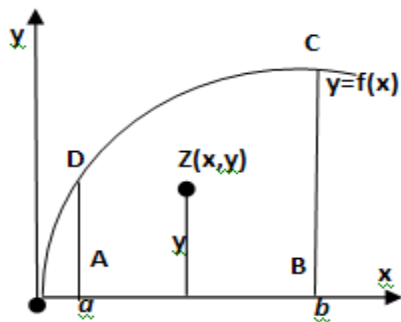
$$y = \sqrt{a^2 - x^2} \Rightarrow dS = a(a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} dx$$

sumbu  $x$  sebagai sumbu putar  $\Rightarrow \bar{y} = 0$

$$\bar{y} = \frac{\int_0^a xy dS}{\int_0^a y dS} = \frac{\frac{1}{2} ax^2 \Big|_0^a}{ax \Big|_0^a} = \frac{a}{2},$$

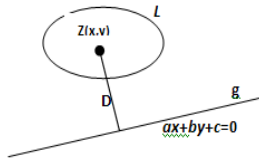
Jadi titik berat kulit setengah bola ini  $C(\frac{a}{2}, 0)$ .

## DALIL GULDIN I



$$V = 2\pi \bar{y} L$$

Secara umum sbb:



$$V = 2\pi \cdot \overline{ZD} \cdot L$$

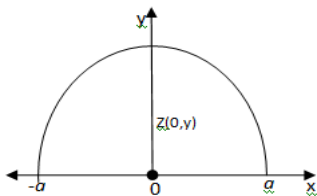
dimana  $\overline{ZD}$  adalah jarak dari titik berat  $Z(\bar{x}, \bar{y})$  ke garis  $g: ax+by+c=0$  adalah:

$$\overline{ZD} = \frac{|a\bar{x} + b\bar{y} + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

## Contoh:

Dapatkan titik berat keping setengah lingkaran  $x^2 + y^2 = a^2$  dengan  $y \geq 0$ .

Penyelesaian:



Dengan dalil Guldin I sumbu Y = sumbu simetri  
 $\Rightarrow \bar{x} = 0$  ambil sumbu x sebagai sumbu putar:

Luas setengah lingkaran:  $L = \frac{1}{2} \pi a^2$ .

Isi bola jari-jari =  $a$ :  $V = \frac{4}{3} \pi a^3$ .

Dalil Guldin I:  $V = 2\pi \cdot \bar{y} \cdot L$

$$\frac{4}{3} \pi a^3 = 2\pi \cdot \bar{y} \cdot \frac{1}{2} \pi a^2 \Rightarrow \bar{y} = \frac{4a}{3\pi}$$

Jadi titik beratnya  $Z(0, \bar{y}) = Z(0, \frac{4a}{3\pi})$