K6. PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA

Anita T. Kurniawati

Definisi:

- Persamaan Diferensial (PD) adalah persamaan yang merupakan hubungan antara turunan (derivative) dari satu variabel tak bebas terhadap satu/lebih variabel bebas.
- Jika turunan tertinggi yang terdapat dalam persamaan adalah tingkat , maka PD itu disebut PD **tingkat** .
- Jika persamaan itu seluruhnya rasional dan bulat dalam turunan-turunan itu, maka pangkat dari turunan tertinggi dalam persamaan itu disebut **derajat** PD itu
- Penyelesaian PD adalah suatu fungsi tanpa turunan-turunan dan yang memenuhi PD itu.
- Penyelesaian Umum Persamaan Diferensial (PUPD): penyelesaian PD yang memuat konstanta-konstanta sebarang yang banyaknya sama dengan tingkat dari PD itu.
- Penyelesaian Partikulir Persamaan Diferensial (PPPD): penyelesaian PD yang didapat dari PUPD jika pada konstanta-konstanta sebarangnya diberi nilai tertentu.

$$\overbrace{\text{PD Biasa (PDB)} \qquad\qquad\qquad\qquad \text{PD Parsial (PDP)}}^{\text{PD}}$$

(hanya mengandung satu variabel bebas)

(mengandung lebih dari satu variabel bebas)

Contoh:

PD Biasa → 1. $\frac{dy}{dx} + 2yx = x^2 + 3$ 2. $y'' - 3y' + 2y = e^{-x}$

PD Parsial → 1. $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - 2xy = 0$ 2. $Z_{xx} + Z_{yy} = 0$.

PD Tingkat Satu Derajat Satu

1. PD dengan variabel terpisah atau dapat dipisah

PD DENGAN VARIABEL-VARIABEL TERPISAH

Bentuk umum: $f(x)\ dx + g(y)\ dy = 0$.

PUPD: $\int f(x)dx + \int g(y)dy = C$.

Contoh:

Selesaikan PD: $x^2dx - 3e^{-y}dy = 0$.

Penyelesaian: $\int x^2\,dx - \int 3e^{-y}\,dy = C$

PUPD: $\frac{1}{3}x^3 + 3e^{-y} = C$.

PD DENGAN VARIABEL-VARIABEL YANG DAPAT DIPISAHKAN

Bentuk umum: $f_1(x)g_2(y)\,dx + f_2(x)g_1(y)dy = 0 \quad : f_2(x)g_2(y)$

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \frac{g_1(y)}{g_2(y)}dy = 0.$$

PUPD: $\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \int \frac{g_1(y)}{g_2(y)}dy = C.$

Contoh:

Selesaikan PD: $(x+1)y\,dx - (y-1)x\,dy = 0.$

Penyelesaian: $(x+1)y\,dx - (y-1)x\,dy = 0 \quad : xy$

$\frac{x+1}{x}\,dx - \frac{y-1}{y}\,dy = 0 \rightarrow \left(1+\frac{1}{x}\right)dx - \left(1-\frac{1}{y}\right)\,dy = 0.$

$\int\left(1+\frac{1}{x}\right)dx - \int\left(1-\frac{1}{y}\right)\,dy = C \rightarrow x + \ln x - y + \ln y = C.$

PUPD: $x - y + \ln xy = C.$

2. PD HOMOGIN

PD: $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ disebut PD Homogin jika dapat ditulis dalam bentuk

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

Substitusi: $\frac{y}{x} = v \rightarrow y = vx.\ dy = v\,dx + x\,dv \rightarrow$ akan didapat PD dengan variabel terpisah.

Contoh:

Selesaikan PD: $(x^2 - xy + y^2)\,dx - xy\,dy = 0.$

Penyelesaian: subs: $y = vx \rightarrow dy = vdx + xdv$

PD menjadi: $(x^2 - vx^2 + v^2x^2)dx - vx^2(vdx + xdv) = 0.$

$$(1-v)x^2dx - vx^3dv = 0 \quad : \quad x^3(1-v)$$

$$\frac{1}{x}dx - \frac{v}{1-v}\,dv = 0 \rightarrow \int\frac{1}{x}dx - \int\frac{v}{1-v}\,dv = C.$$

$$\ln x + \int \left(1 - \frac{1}{1-v}\right) dv = C \rightarrow \ln x + v - \ln(1-v) = C.$$

$$\ln x + \ln e^{v} - \ln(1-v) = \ln K \rightarrow \ln \frac{xe^{v}}{1-v} = \ln K.$$

$$\frac{xe^{v}}{1-v} = K \rightarrow \frac{xe^{\frac{y}{x}}}{1-\frac{y}{x}} = K \rightarrow e^{\frac{y}{x}} = K(x-y).$$

Jadi PUPD: $e^{\frac{y}{x}} = K(x-y)$.

3. PD BERBENTUK: $(ax + by + c)dx + (px + qy + r)dy = 0$

1. Jika $aq - bp = 0 \rightarrow$ subst: $u = ax + by;\ dy = \frac{1}{b}(du - adx)$.

   menjadi PD dengan variable terpisah.

2. Jika $aq - bp \neq 0 \rightarrow$ subst: $\begin{cases} x = x_1 + h & \rightarrow dx = dx_1 \\ y = y_1 + k & \rightarrow dy = dy_1 \end{cases}$

   dimana $\begin{cases} h = x \\ k = y \end{cases}$ adalah penyelesaian dari $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ px + qy + r = 0 \end{cases}$

   maka PD menjadi PD homogin: $(ax_1 + by_1)\, dx_1 + (px_1 + qy_1)\, dy_1 = 0$.

Contoh:

Selesaikan PD: $(x+y)\,dx + (x+y-1)\,dy = 0$.

Penyelesaian: Pada soal ini: $aq - bp = 0 \rightarrow$ subst: $u = x + y;\;\; dy = (du - dx)$.

PD menjadi: $u\,dx + (u-1)(du - dx) = 0 \rightarrow dx + (u-1)du = 0$.

$\int dx + \int (u-1)du = C \rightarrow x + \frac{1}{2}u^2 - u = C$.

$x + \frac{1}{2}(x+y)^2 - (x+y) = C$. Jadi PUPD: $\frac{1}{2}(x+y)^2 - y = C$.

4. PD EKSAK

PD : $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ disebut PD Eksak jika dan hanya jika $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$.

PUPD: $F(x,y) = C$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y) \rightarrow F(x,y) = \int^{x} M(x,y)\,dx + R(y)$$

R(y) didapat dari:

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$$

Contoh:

Selesaikan PD: $(3x^2 + 6xy)dx + (3x^2 + 3y^2) = 0$.

Penyelesaian: $\begin{cases} M(x,y) = 3x^2 + 6xy \to \frac{\partial M}{\partial y} = 6x \\ N(x,y) = 3x^2 + 3y^2 \to \frac{\partial N}{\partial x} = 6x \end{cases}$ →sama, maka PD tersebut PD Eksak.

$$F(x,y) = \int^x M(x,y)dx + R(y)$$

$$= \int^x (3x^2 + 6xy)dx + R(y) = x^3 + 3x^2y + R(y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 + R'(y) = N(x,y)$$

$$3x^2 + R'(y) = 3x^2 + 3y^2 \to R'(y) = 3y^2 \to R(y) = y^3.$$

PUPD: $x^3 + 3x^2y + y^3 = C$.

5. PD LINIER TINGKAT SATU

Bentuk umum: $\frac{dy}{dx} = yP = Q$.

Faktor pengintegral: $v = e^{\int P\,dx}$

PUPD: $yv = \int Qv\,dx + C$.

Contoh:

Selesaikan PD: $\frac{dy}{dx} + y = 2 + 2x$

Penyelesaian:

Faktor pengintegral: $v = e^{\int 1\,dx} = e^x$.

PUPD: $ye^x = \int (2 + 2x)e^x dx + C$

$$= 2e^x + 2(xe^x - e^x) + C$$

$$= 2xe^x + C.$$

Jadi PUPD: $y = (2xe^x + C)e^{-x}$.

6. PD BERNOULLI

Bentuk umum:

$\frac{dy}{dx} + yP = y^nQ.$ ......(1)

Persamaan (1) dibagi y^n, didapat: $y^{-n}\frac{dy}{dx} + y^{1-n}P = Q.$

Substitusi: $v = y^{1-n} \to \frac{dv}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx} \to y^{-n}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(1-n)}\frac{dv}{dx}$

PD menjadi : $\frac{dv}{dx} + v(1-n)P = (1-n)Q.$

Contoh:

Selesaikan PD: $\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = y^3x^3.$

Penyelesaian:

Substitusi: $v = y^{-3+1} = y^{-2} \to \frac{dv}{dx} = -2y^{-3}\frac{dy}{dx}$

PD menjadi: $\frac{dv}{dx} - \frac{2}{x}v = -2x^3$ →PD linier tingkat Satu

Faktor pengintegral: $u = e^{\int \frac{-2}{x}dx} = x^{-2}.$

$v.x^{-2} = \int^{x} -2x^3x^{-2}dx + C = -x^2 + C \to v = -x^4 + Cx^2.$

PUPD: $y^{-2} = -x^4 + Cx^2.$

7. PD RICCATI

Bentuk: $\frac{dy}{dx} = q(x) + p(x)y + r(x)y^2$.

Jika p, q, r konstan maka $\int \frac{dy}{q+py+ry^2} = x + C$.

Jika $r(x) = 0$ →PD linier.

Jika $q(x) = 0$ →PD Bernoulli.

Mendapatkan penyelesaian umum PD Riccati, sbb:

Dicari/diketahui penyelesaian partikulir $y = y_1(x)$, maka:

$y'_1(x) = q(x) + p(x)y_1(x) + r(y)y_1^2(x)$

Ambil $y = y_1(x) + z(x) \rightarrow \frac{dZ}{dx} - (p + 2ry_1)Z = rZ^2$ →PD Bernoulli.

Contoh:

Selesaikan PD: $y' = e^{2x} + e^x - 2e^x y + y^2$. Jika diketahui penyelesaian partikulir $y_1 = e^x$.

Penyelesaian: $r(x) = 1;\ p(x) = -2e^x;\ q(x) = e^{2x} + e^x$

Ambil $y = e^x + Z \rightarrow \frac{dZ}{dx} - (-2e^{2x} + 2e^{2x})Z = Z^2 \rightarrow \frac{dZ}{dx} = Z^2 \rightarrow Z = \frac{1}{C-x}$.

Maka penyelesaian PD Riccati tersebut adalah:

$y(x) = e^x + \frac{1}{C-x}$.

PD TINGKAT DUA

1. PD : $\frac{d^2y}{dx^2} = f(x)$

Contoh: Selesaikan PD: $\frac{d^2y}{dx^2} = 3x^2 - 6.$

Penyelesaian: $\frac{dy}{dx} = \int (3x^2 - 6)dx = x^3 - 6x + C_1 \rightarrow y = \int (x^3 - 6x + C_1)\,dx$

PUPD: $y = \frac{1}{4}x^4 - 3x^2 + C_1x + C_2.$

2. PD : $\frac{d^2y}{dx^2} = f(y)$

Misal: $\frac{dy}{dx} = p \rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p\ \frac{dp}{dy}.$

PD menjadi: $p\ \frac{dp}{dy} = f(y) \rightarrow \int p\ dp = \int f(y)dy \rightarrow p^2 = 2\int f(y)dy + C_1.$

Atau $\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{2\int f(y)dy + C_1} \rightarrow dx = \pm\ \frac{dy}{\sqrt{2\int f(y)dy + C_1}}.$

Jadi $x = \pm\int \frac{dy}{\sqrt{2\int f(y)dy + C_1}} + C_2.$

Contoh:

Selesaikan PD: $\frac{d^2y}{dx^2} = y$.

Penyelesaian: $p^2 = 2\int y\,dy + C_1 \rightarrow p^2 = y^2 + C_1 \rightarrow \frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{y^2 + C_1}$.

$$x = \pm\int \frac{dy}{\sqrt{y^2+C_1}} + C_2 = \pm\ln\left|y + \sqrt{y^2 + C_1}\right| + C_2.$$

Jadi PUPD: $x = \pm\ln\left|y + \sqrt{y^2 + C_1}\right| + C_2$.

3. PD : $p\frac{d^2y}{dx^2} + q\frac{dy}{dx} + ry = 0$; p, q, r :konstan

Misal: $y = e^{kx} \rightarrow \frac{dy}{dx} = y' = ke^{kx} \rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = y'' = k^2e^{kx}$

Maka PD menjadi: $pk^2e^{kx} + qke^{kx} + re^{kx} = 0 \rightarrow e^{kx}(pk^2 + qk + r) = 0$.

Karena $e^{kx} \neq 0$, sehingga: $pk^2 + qk + r = 0$.

Persamaan karakteristik: $pk^2 + qk + r = 0$ dengan akar-akar k_1 dan k_2

dengan rumus "abc" :

$$k_{1,2} = \frac{-q \pm \sqrt{q^2 - 4pr}}{2p}$$

Ada 3 kasus berhubung dengan akar-akar karakteristik:

1. Jika $k_1 \neq k_2$ (real berlainan), maka PUPD: $\boxed{y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}}$
2. Jika $k_1 = k_2$ (real kembar = k), maka PUPD: $\boxed{y = e^{kx}(C_1 x + C_2)}$
3. Jika $k_{1,2} = a \pm bi$ (kompleks sejodoh), maka PUPD: $\boxed{y = e^{ax}(C_1 \cos bx + C_2 \sin bx)}$

Contoh:

Selesaikan PD: $2\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = 0.$

Penyelesaian:

Persamaan Karakteristik (PK): $2k^2 - k = 0$

Akar-akar karakteristik: $k(2k-1) = 0 \rightarrow k_1 = 0, k_2 = \frac{1}{2}$

PUPD: $y = C_1 + C_2 e^{\frac{1}{2}x}$.

4. PD LENGKAP: $p\frac{d^2y}{dx^2} + q\frac{dy}{dx} + ry = f(x)$; p, q, r : konstan

PD diubah dalam operator D, menjadi:

$$\left(pD^2 + qD + r\right)y = f(x)$$

PUPD: $y = y_c + y_p$

$y_c \rightarrow PD : \left(pD^2 + qD + r\right)y = 0$ (dicari Pers. Karakteristik)

$y_p = \dfrac{1}{pD^2 + qD + r} f(x)$, dengan cara:

1. Metode Operator
2. Metode Variasi Parameter

Penyelesaian Yp dengan Metode Operator:

PD Lengkap: $F(D)y = f(x) \rightarrow y_p = \frac{1}{F(D)} f(x)$

Sifat-sifat:

a. Jika $f(x) = e^{ax}$ maka $y_p = \frac{1}{F(D)} e^{ax} = \frac{e^{ax}}{F(a)}$; $\quad F(a) \neq 0$

b. Jika $f(x) = e^{ax}\,V(x)$ maka $y_p = \frac{1}{F(D)} e^{ax}\,V(x) = e^{ax} \frac{1}{F(D+a)} V(x)$

c. Jika $f(x) = P_n(x)$ polynomial derajat n dalam x, maka

$y_p = \frac{1}{F(D)} P_n(x) = (b_0 + b_1 D + b_2 D^2 + \cdots.)P_n(x);\quad b_0 \neq 0.$

$\frac{1}{F(D)}$ dideretkan menurut deret kuasa (deret pangkat) dalam D cukup sampai dengan suku D^n saja. Berdasarkan deret Maclaurin:

$$\frac{1}{1-D} = 1 + D + D^2 + D^3 + \cdots.$$

$$\frac{1}{1+D} = 1 - D + D^2 - D^3 + \cdots.$$

d. Jika $f(x) = P(x)\cos ax$ maka $y_p = Re\left\{\frac{1}{F(D)} P(x)e^{iax}\right\}$.

Rumus Euler: $e^{iax} = \cos ax + i\sin ax$; $\quad e^{-iax} = \cos ax - i\sin ax$

e. Jika $f(x) = P(x)\sin ax$ maka $y_p = Im\left\{\frac{1}{F(D)} P(x)e^{iax}\right\}$.

f. Jika $f(x) = x\,V(x)$ maka $y_p = \frac{1}{F(D)} x\,V(x) = x\,\frac{1}{F(D)} V(x) - \frac{F'(D)}{\{F(D)\}^2} V(x)$

g. $\frac{1}{F(D^2)}\cos(ax+b) = \frac{1}{F(-a^2)}\cos(ax+b); F(-a^2) \neq 0$

h. $\frac{1}{F(D^2)}\sin(ax+b) = \frac{1}{F(-a^2)}\sin(ax+b); F(-a^2) \neq 0$

Contoh 1:

Selesaikan PD: $y'' - 3y' + 2y = e^{-2x}$

Penyelesaian:

PD: $(D^2 - 3D + 2)y = e^{-2x}$

PR: $(D^2 - 3D + 2)y = 0 \rightarrow (D-1)(D-2) = 0$

PUPR: $y_c = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$

$$y_p = \frac{1}{D^2 - 3D + 2} e^{-2x} = \frac{e^{-2x}}{(-2)^2 - 3(-2) + 2} = \frac{e^{-2x}}{12}$$

PUPD: $y = y_c + y_p = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{e^{-2x}}{12}$

Contoh 2:

Selesaikan PD: $y'' - y = 2x - x^3$

Penyelesaian:

PD: $(D^2 - 1)y = 2x - x^3$

PR: $(D^2 - 1)y = 0 \rightarrow (D-1)(D+1)y = 0$

PUPR: $y_c = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$

$$y_p = \frac{1}{D^2 - 1}(2x - x^3) = -\frac{1}{(1 - D^2)}(2x - x^3) = -(1 + D^2 + D^4 + \cdots)(2x - x^3)$$

$$= -[(2x - x^3) + D^2(2x - x^3) + \cdots.] = -[2x - x^3 - 6x] = x^3 + 4x$$

PUPD: $y = y_c + y_p = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + x^3 + 4x.$

Contoh 3:

Selesaikan PD: $y'' + 4y = \cos 2x$

Penyelesaian:

PD: $(D^2 + 4)y = \cos 2x$

PR: $(D^2 + 4)y = 0 \rightarrow (D + 2i)(D - 2i) = 0$

$y_c = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x.$

$$y_p = \frac{1}{D^2+4}\cos 2x = Re\left\{\frac{1}{D^2+4}\ e^{2ix}\right\} = Re\left\{\frac{1}{(D-2i)}\cdot\frac{1}{(D+2i)}e^{2ix}\right\}$$

$$= Re\left\{\frac{1}{(D-2i)}\cdot\frac{1}{(2i+2i)}e^{2ix}\right\} = Re\left\{\frac{1}{4i}.e^{2ix}\int e^{2ix}e^{-2ix}dx\right\}$$

$$= Re\left\{\frac{1}{4i}.e^{2ix}\int dx\right\} = Re\left\{\frac{1}{4i}xe^{2ix}\right\} = Re\left\{\frac{x}{4i}(\cos 2x + i\sin 2x)\right\}$$

$$= Re\left\{\frac{1}{4}x\sin 2x + \frac{1}{4}ix\cos 2x\right\} = \frac{1}{4}x\sin 2x$$

PUPD: $y = y_c + y_p = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{1}{4}x\sin 2x$.

2. Penyelesaian Yp dengan Variasi Parameter

PD: $y'' + py' + qy = f(x)$

PR: $y'' + py' + qy = 0$

Jika penyelesaian umum persamaan tereduksi (PUPR) adalah

$y_c = C_1\, y_1(x) + C_2\, y_2(x)$ maka $y_p = L_1(x)y_1(x) + L_2(x)\, y_2(x)$

dimana L_1 dan L_2 didapat dari $\begin{cases} L_1'y_1 + L_2'y_2 = 0 \\ L_1'y_1' + L_2'y_2' = f(x) \end{cases}$

Contoh:

Selesaikan PD: $(D^2+1)y = \operatorname{tg} x$

Penyelesaian: Dengan cara Variasi parameter.

PR: $(D^2+1)y = 0 \rightarrow (D+i)(D-i)y = 0$

$y_c = C_1 \sin x + C_2 \cos x$

$y_p = L_1(x) \sin x + L_2(x) \cos x$, dimana L_1 dan L_2 didapat dari:

$$\begin{cases} L_1' \sin x + L_2' \cos x = 0 \\ L_1' \cos x - L_2' \sin x = \operatorname{tg} x \end{cases}$$

Dari dua persamaan tersebut didapat:

$$L_1' = \sin x \rightarrow L_1 = \int \sin x \, dx = -\cos x$$

$$L_2' = \cos x - \sec x \rightarrow L_2 = \int (\cos x - \sec x)\, dx = \sin x - \ln(\sec x + \operatorname{tg} x)$$

Sehingga didapat: $y_p = -\cos x \sin x + \{\sin x - \ln(\sec x + \operatorname{tg} x)\}\cos x$

$$= -\cos x \,.\ln(\sec x + \operatorname{tg} x)$$

Jadi: $y = y_c + y_p = C_1 \sin x + C_2 \cos x - \cos x \,.\ln(\sec x + \operatorname{tg} x)$

3. PD EULER

Bentuk umum:

$$p_0(ax+b)^n y^n + p_1(ax+b)^{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(ax+b)\square y' + p_n y = f(x)$$

dengan $a, b, p_0, p_1, \ldots, p_n$ adalah konstanta-konstanta.

Substitusi:

$$ax+b = e^t \to t = \ln(ax+b)$$

$$x = \frac{e^t - b}{a}; \qquad \frac{dt}{dx} = \frac{a}{ax+b}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}.\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}.\frac{a}{ax+b} \to (ax+b)y' = a\,\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{a^2}{(ax+b)^2}.\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right) \to (ax+b)^2 y'' = a^2\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{a^3}{(ax+b)^3}.\left(\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\right) \to (ax+b)^3 y''' = a^3\left(\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\right)$$

Jika $D = \frac{d}{dt} \to (ax+b)y' = a\,Dy;\ (ax+b)^2y'' = a^2D(D-1)y;$

$$(ax+b)^3y''' = a^3D(D-1)(D-2)y$$

Secara umum dapat ditulis: $(ax+b)^n y^{(n)} = a^n D(D-1)(D-2)\ldots(D-n+1)y$

Sehingga PD (1) menjadi:

$$\{p_0a^nD(D-1)(D-2)\ldots.(D-n+1) + p_1a^{n-1}D(D-1)(D-2)\ldots.(D-n+2) + \cdots + p_n\}\,y$$

$$= f\left(\frac{e^t-b}{a}\right)$$ adalah PD linier dengan koefisien konstan.

Untuk lebih khususnya diambil PD: $p_0x^2y'' + p_1xy' + p_2y = f(x)$, ...(2)

dengan p_0, p_1, p_2 konstanta.

Penyelesaian:

Substitusi: $x = e^t \to t = \ln x\,;\ \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}$

$$xy' = Dy; \quad x^2y'' = D(D-1)y$$

Sehingga PD (2) menjadi $p_0 D(D-1)y + p_1 Dy + p_2 y = f(e^t)$

Contoh:

Selesaikan PD: $x^2y'' - xy' + 2y = \ln x$

Penyelesaian:

Substitusi: $x = e^t \to t = \ln x\,;\ \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}$

$$xy' = Dy; \quad x^2y'' = D(D-1)y$$

Sehingga PD menjadi: $\{D(D-1) - D + 2\}y = t$ atau $(D^2 - 2D + 2)y = t$

PR: $(D^2 - 2D + 2)y = 0 \to (D+i)(D-i)y = 0$

$y_c = e^t(C_1 \cos t + C_2 \sin t)$

$$y_p = \frac{1}{2 - 2D + D^2}\,t = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\left\{1 - \left(\frac{2D - D^2}{2}\right)\right\}}\,t = \frac{1}{2}\left[1 + \left(\frac{2D - D^2}{2}\right) + \cdots\right]t = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}$$

PUPD: $y = y_c + y_p = e^t(C_1 \cos t + C_2 \sin t) + \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}.$

Ganti $x = e^t;\ t = \ln x \to y = x\left\{C_1 \cos\ln(x) + C_2 \sin\ln(x) + \frac{1}{2}\ln x + \frac{1}{2}\right\}$

4. PD SERENTAK (PD SIMULTAN)

Bentuk PD Simultan dengan 2 persamaan dan 2 varibel yang tidak diketahui:

$$\begin{cases} f_1(D)y + g_1(D)Z = h_1(x) \\ f_2(D)y + g_2(D)Z = h_2(x) \end{cases}$$ dimana $f_1(D), f_2(D), g_1(D), g_2(D)$

adalah polynomial dalam D dengan koefisien-koefisien konstan.

$$\Delta = \begin{vmatrix} f_1(D) & g_1(D) \\ f_2(D) & g_2(D) \end{vmatrix} = f_1(D)g_2(D) - f_2(D)g_1(D)$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} h_1(D) & g_1(D) \\ h_2(D) & g_2(D) \end{vmatrix} = g_2(D)h_1(D) - g_1(D)h_2(D)$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} f_1(D) & h_1(D) \\ f_2(D) & h_2(D) \end{vmatrix} = f_1(D)h_2(D) - f_2(D)h_1(D)$$

PD menjadi: $\Delta y = \Delta_1$ dan $\Delta Z = \Delta_2$.

Banyaknya konstanta-konstanta sebarang pada PUPD serentak adalah sama dengan pangkat tertinggi dari D dalam Δ.

Contoh:

Selesaikan PD serentak : $\begin{cases} (D+1)y + (D-2)Z = e^{-x} \text{ ………………… (1)} \\ (D+1)y + (D-3)Z = x \text{ ………………….. (2)} \end{cases}$

Penyelesaian:

$$\Delta = \begin{vmatrix} D+1 & D-2 \\ D+1 & D-3 \end{vmatrix} = (D+1)(D-3) - (D-2)(D+1) = -D-1$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} e^{-x} & D-2 \\ x & D-3 \end{vmatrix} = (D-3)e^{-x} - (D-2)x = -e^{-x} - 3e^{-x} - 1 + 2x$$

$$= -4e^{-x} - 1 + 2x$$

$\Delta y = \Delta_1 = -4e^{-x} - 1 + 2x$

$(-D-1)y = -4e^{-x} - 1 + 2x$

$(D+1)y = 4e^{-x} + 1 - 2x$

PR: $(D+1)y = 0 \rightarrow y_c = Ae^{-x}$.

$$y_p = \frac{1}{D+1}(-4e^{-x} - 1 + 2x) = e^{-x}\int 4e^{-x}e^{x}dx - e^{-x}\int 2xe^{x}dx + e^{-x}\int e^{x}dx$$

$$= 4xe^{-x} - 2e^{-x}(xe^{x} - \int e^{x}dx) + e^{-x}e^{x}$$

$$= 4xe^{-x} - 2e^{-x}(xe^{x} - e^{x}) + 1$$

$$= 4xe^{-x} - 2x + 3$$

$y = y_c + y_p = Ae^{-x} + 4xe^{-x} - 2x + 3$..(3)

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} D+1 & e^{-x} \\ D+1 & x \end{vmatrix} = (D+1)x - (D+1)e^{-x} = 1 + x + e^{-x} - e^{-x} = x + 1$$

$\Delta Z = \Delta_2 = x + 1$

$(-D-1)Z = x + 1 \rightarrow (D+1)Z = -(x+1)$

$Z_c = Be^{-x}$

$$Z_p = \frac{1}{D+1}\{-(x+1)\} = -(1 - D + D^2 + \cdots)(x+1)$$

$$= -(x + 1 - 1) = -x$$

$Z = Z_c + Z_p = Be^{-x} - x$.................(4)

Karena derajat D dalam Δ adalah derajat satu maka pada penyelesaian umum haruslah hanya ada satu konstanta sebarang.

(3) dan (4) disubstitusi ke (2), menjadi:

$(D+1)(Ae^{-x} + 4xe^{-x} - 2x + 3) + (D-3)(Be^{-x} - x) = x$

$-Ae^{-x} + 4e^{-x} - 4xe^{-x} - 2 + Ae^{-x} + 4xe^{-x} - 2x + 3 -$

$Be^{-x} - 1 - 3Be^{-x} + 3x = x$

$4e^{-x} - 4Be^{-x} + x = x \rightarrow B = 1$

Jadi PUPD serentak: $y = Ae^{-x} + 4xe^{-x} - 2x + 3$; $Z = e^{-x} - x$