



# METODE NUMERIK

Pertemuan ke – 5

## Sistem Persamaan Linier (SPL)

( 1 )

# Representasi SPL

- ♦ Bentuk umum persamaan linear dengan n peubah

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$$

- ♦ Dimana :

- $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  : koefisien dari persamaan

- dan  $x_1, x_2, \dots, x_n$  merupakan peubah.

# Representasi SPL

- ♦ Dalam penyelesaian sistem persamaan linier, akan dicari nilai  $x_1, x_2, \dots, x_n$  yang memenuhi sistem persamaan berikut :

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

$$f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

$$f_3(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

:

$$f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$



# Representasi SPL

- ◆ Sehingga sistem persamaan linier diatas mempunyai bentuk umum sebagai berikut :

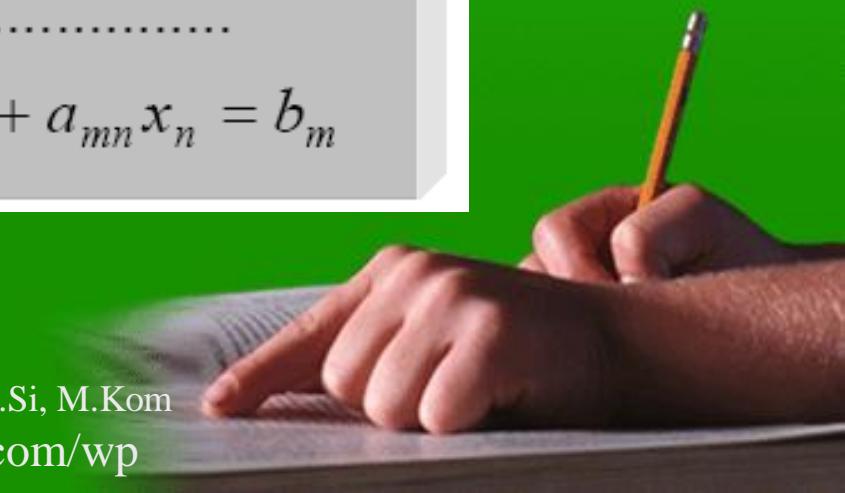
$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n = b_3$$

.....

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$



# Representasi SPL

- Dapat dinotasikan dengan matrik :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$



# Penyelesaian SPL untuk $n \leq 3$

- ◆ Metode Grafik
- ◆ Metode Substitusi – Eliminasi
- ◆ Metode aturan Cramer dan Determinan Matrik



# Metode Grafik

- ◆ Metode grafik merupakan salah satu metode program linier yang hanya memuat dua variabel yang akan dicari.
- ◆ Langkah-langkah pemecahan dengan metode grafik adalah sebagai berikut :
  - Gambarkan sebuah bidang koordinat dengan kedua variabel sebagai sumbu koordinat.
  - Gambarkan garis-garis fungsi persamaan.
  - Tentukan koordinat titik potong yang terbentuk dari garis-garis fungsi persamaan.

# Metode Substitusi – Eliminasi

- ◆ Metode substitusi – eliminasi merupakan :
  - metode untuk menghilangkan salah satu variabel yang diinginkan kemudian
  - dilakukan cara substitusi untuk mendapatkan nilai variabel berikutnya.

# Metode aturan Cramer dan Determinan Matrik

- ◆ Metode ini dikerjakan dengan menggunakan aturan Cramer dan perhitungan nilai determinan pada matrik koefisien dari sistem persamaan linier yang akan diselesaikan.
- ◆ 2 Persamaan Linier :  
$$a_{11}x + a_{12}y = b_1$$
$$a_{21}x + a_{22}y = b_2$$
- ◆ Dengan Determinan  $D = |a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}|$
- ◆ Dengan aturan Cramer

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{D} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{22} & b_2 \end{vmatrix}}{D}$$



# Penyelesaian SPL untuk $n > 3$

- ♦ Secara garis besar terdapat dua cara untuk memperoleh penyelesian sistem persamaan linier, yaitu :
  - Eliminasi :
    - Eliminasi Gauss
    - Gauss-Jordan
  - Iterasi :
    - Gauss-Seidel*
    - Jacobi*
    - Successive Over Relaxation (SOR)*

# Eliminasi Gaus

- ◆ Eliminasi Gauss prinsipnya:
  - merupakan operasi eliminasi dan substitusi variabel-variabelnya
  - sedemikian rupa dapat terbentuk *matriks segitiga atas*,
  - akhirnya solusinya diselesaikan menggunakan teknik substitusi balik (*backsubstitution*).

# Langkah Eliminasi Gauss

- Ubahlah sistem persamaan linier tersebut menjadi **matrik augment**, yaitu suatu matrik yang berukuran  $n \times (n + 1)$

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \underline{a_{2n}} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array} \right] \quad \left[ \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & a_{1,n+1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & a_{2,n+1} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} & a_{3,n+1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & a_{n,n+1} \end{array} \right]$$

- Periksalah elemen-elemen pivot.

- Elemen-elemen pivot adalah elemen-elemen yang menempati **diagonal** suatu matrik, yaitu  $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$  atau disingkat  $a_{ii}$ .
- Jika , bisa dilanjutkan ke langkah no.3. Namun, jika ada elemen diagonal yang bernilai nol,  $a_{ii} = 0$ , maka baris dimana elemen itu berada harus ditukar posisinya dengan baris yang ada dibawahnya,  $(P_i)(P_j)$  dimana  $j = i + 1, i + 2, \dots, n$ , sampai elemen diagonal matrik menjadi tidak nol,

- ◆ Proses triangularisasi. Lakukanlah operasi berikut:  $P_j - \frac{a_{ji}}{a_{ii}} P_i \rightarrow P_j$

dimana  $j = i + 1, i + 2, \dots, n$ .

Maka matrik augment akan menjadi :

$$\left[ \begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & | & a_{1,n+1} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} & | & a_{2,n+1} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{3n} & | & a_{3,n+1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & | & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} & | & a_{n,n+1} \end{array} \right]$$

- ◆ Hitung nilai  $x_n$  dengan cara :  $x_n = \frac{a_{n,n+1}}{a_{nn}}$
- ◆ Lakukanlah proses substitusi mundur untuk memperoleh  $x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_1$  dengan cara :

$$x_i = \frac{a_{i,n+1} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j}{a_{ii}}$$

# Contoh

- ◆ Diberikan sistem persamaan linier sebagai berikut :

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11$$

$$4x_1 + 3x_2 + 10x_3 = 28$$

$$2x_1 + 4x_2 + 17x_3 = 31$$

- ◆ Carilah solusi dari sistem persamaan linier diatas.

# Penyelesaian

- ♦ **Langkah Pertama**, Persamaan pertama dari sistem dibagi koefisien pertama dari persamaan pertama:

$$\underline{2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11} : 2$$

□ Dihasilkan :  $x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_3 = \frac{11}{2}$

- ♦ **Langkah Kedua**, Persamaan yang dihasilkan langkah pertama dikalikan dengan koefisien pertama persamaan kedua

$$\left( x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_3 = \frac{11}{2} \right) \times 4$$

□ Dihasilkan  $4x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 22$

- ♦ **Langkah Ketiga**, Persamaan kedua dikurangkan dengan persamaan hasil langkah kedua. Dihasilkan :

$$x_2 + 4x_3 = 6$$

#### ♦ **Langkah Keempat,**

- Persamaan yang telah dinormalkan (persamaan hasil langkah pertama) dikalikan dengan koefisien pertama dari persamaan ketiga dan hasilnya dikurangkan pada persamaan ketiga.
- Sehingga dihasilkan :       $3x_2 + 14x_3 = 20$

#### ♦ **Langkah kelima,**

- persamaan hasil langkah ketiga dibagi dengan koefisien pertama persamaan tersebut kemudian dikalikan dengan koefisien pertama dari persamaan hasil langkah keempat
- Sehingga dihasilkan :       $2x_3 = 2$



- ◆ Sehingga didapat sistem persamaan baru :

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11$$

$$x_2 + 4x_3 = 6$$

$$2x_3 = 2$$

- ◆ Sehingga penyelesaiannya adalah :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

# Eliminasi Gauss- Jordan

- ◆ Eliminasi Gauss-Jordan prinsipnya:
  - mirip sekali dengan metode Eliminasi Gauss,
  - matriks A mengalami inversi terlebih dahulu untuk mendapatkan matriks identitas (I).
- ◆ Merupakan metode pengembangan eliminasi gauss, hanya saja augmented matrik, pada sebelah kiri diubah menjadi matrik diagonal

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} & b_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & d_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & d_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & d_n \end{bmatrix}$$

# Gambaran umum metode eliminasi Gauss - Jordan

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & | & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & | & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & | & b_3 \end{array} \right]$$



$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & | & b_1^{(n)} \\ 0 & 1 & 0 & | & b_2^{(n)} \\ 0 & 0 & 1 & | & b_3^{(n)} \end{array} \right]$$



$$x_1 = b_1^{(n)}$$

$$x_2 = b_2^{(n)}$$

$$x_3 = b_3^{(n)}$$



# Soal Latihan

♦  $3x + 2y - z = 7$

$$2x - 3y + 2z = 3$$

$$x + 5y + z = 8$$

♦  $x + 3y - z = 6$

$$2x + y + 2z = 5$$

$$2y + z = 8$$

